वनक्षेत्राधिकारी परीक्षा – 2018
(मुख्य)

No. of Printed Pages : 4

VRA- 17

2015

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : तीन घण्टे] *[पूर्णांक : 200*

Time allowed : Three Hours] *[Maximum Marks : 200*

नोट : (i) *इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड '**अ**' तथा '**ब**' हैं । प्रत्येक खण्ड में **चार** प्रश्न हैं । किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए, प्रत्येक खण्ड से कम से कम **दो** प्रश्न अवश्य होना चाहिये ।*

(ii) ***सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं ।*

(iii) *एक प्रश्न के सभी भागों का उत्तर अनिवार्यत: एक साथ दिया जाय ।*

(iv) *केवल नॉन-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर अनुमन्य है ।*

Note : (i) *This question paper has two sections '**A**' and '**B**'. Every section has **four** questions, attempt any **five** questions. At least **two** questions should be from every section.*

(ii) ***All** questions carry equal marks.*

(iii) *All the parts of a question must be answered together.*

(iv) *Only non-programmable calculators are allowed.*

खण्ड – 'अ'

SECTION – 'A'

1. (अ) यदि V, $n \times n$ आव्यूहों की, प्रान्त F पर, एक वैक्टर समष्टि हो तथा B $n \times n$ की एक निश्चित आव्यूह हो और T(A) को इस प्रकार परिभाषित किया जाए $T(A) = AB - BA$, तो सिद्ध कीजिए कि T, V से V में एक रैखिक रूपान्तर है । **20**

(ब) बीटा तथा गामा फलनों के प्रयोग से समाकल $\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta \cos^n\theta \, d\theta$ का मान ज्ञात करें तथा सिद्ध करें

कि $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$. **20**

(a) Let V be the vector space of $n \times n$ matrices over the field F, and let B be a fixed $n \times n$ matrix and T(A) is defined as $T(A) = AB - BA$, then prove that T is a linear transformation from V into V.

(b) Evaluate the integral $\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta \cos^n\theta \, d\theta$ using Beta and Gamma functions and prove that $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$.

2. (अ) समतलों $2x - y = 0$, $3z - y = 0$ की कटान रेखा से जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो कि समतल $4x + 5y - 3z = 8$ के लम्बवत् है । 10

(ब) दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करने वाले उन समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जिन पर रेखा $7x + 10y = 30$, $5y - 3z = 0$ स्थित है । 10

(स) अवकल समीकरण $(D^3 - D^2 - 6D)\, y = x^2 + 1$ का हल ज्ञात कीजिए जहाँ पर $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ है । 20

(a) Find the equation of the plane which passes through the line of intersection of the planes $2x - y = 0$, $3z - y = 0$ and is perpendicular to the plane $4x + 5y - 3z = 8$.

(b) Find the equations of the planes which contain the line $7x + 10y = 30$, $5y - 3z = 0$ and touch the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$.

(c) Solve the differential equation

$$(D^3 - D^2 - 6D)\, y = x^2 + 1 \text{ where } D \equiv \frac{d}{dx}.$$

3. (अ) सदिशों $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के लिए सूत्र $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ का सत्यापन कीजिए । 10

(ब) यदि $\vec{r}$ की दिशा में $\hat{r}$ एक इकाई सदिश हो तो सिद्ध करें कि $\hat{r} \times d\hat{r} = \dfrac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$ 10

(स) छ: समान छड़ें AB, BC, CD, DE, EF, FA (प्रत्येक छड़ का भार W) अपने-अपने छोरों पर मुक्त रूप से इस प्रकार जुड़ी हैं कि उनसे एक समषट्भुज बनता है । छड़ AB क्षैतिज स्थिति में है तथा AB व DE के मध्य बिन्दुओं को एक डोरी से जोड़ा गया है । सिद्ध करें कि डोरी का तनाव 3W है । 20

(a) Verify the formula $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$, where $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

(b) If $\hat{r}$ be the unit vector in the direction of $\vec{r}$, then prove that $\hat{r} \times d\hat{r} = \dfrac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$

(c) Six equal rods AB, BC, CD, DE, EF, FA (each of weight W) are freely jointed at their extremities so as to form a hexagon; the rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are jointed by a string. Prove that the tension in the string is 3W.

4. (अ) एक कण किसी चिकने साइक्लोइड (जिसका शीर्ष नीचे है) के कस्प से चाप के सहारे फिसलता है । दिखाइए कि जब यह ऊर्ध्वाधर ऊँचाई की आधी ऊँचाई चल लेता है, तब इसकी ऊर्ध्वाधर गति अधिकतम है । **20**

(ब) एक द्रव में डूबे हुए किसी ठोस वृत्ताकार बेलन के अक्ष का ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ है तथा किसी अन्य स्थिति में उसका झुकाव $90° - \theta$ है । दोनों स्थितियों में बेलन की दोनों सतहों पर दाब का अन्तर क्रमश: P व P' है । सिद्ध करें कि विस्थापित द्रव का भार है $\sqrt{p^2 + p'^2}$ । **20**

अथवा / OR

यदि A_{ij} एक सहपरिवर्ती सदिश का कर्ल (curl) है तो सिद्ध कीजिए कि $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$

(a) Prove that for a particle, sliding down the arc and starting from the cusp of a smooth cycloid whose vertex is lowest, the vertical velocity is maximum when it has described half the vertical height.

(b) The inclinations of the axis of a submerged solid circular cylinder to the vertical in two different positions are θ and $90° - \theta$. If P and P′ be the difference between the pressures on the two ends in the two cases, prove that the weight of the displaced liquid is equal to $\sqrt{p^2 + p'^2}$.

OR

If A_{ij} is the curl of a covariant vector prove that $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$

खण्ड – 'ब'

SECTION – 'B'

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = u + iv = \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}$ जबकि $z \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ मूल बिन्दु पर सतत है तथा वहाँ पर कोशी-रीमाँ समीकरण सन्तुष्ट होती हैं फिर भी इस बिन्दु पर $f'(z)$ का अस्तित्व नहीं है । **20**

(ब) दर्शाइए कि $u = \dfrac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $v = \dfrac{(x^2-y^2)\,z}{(x^2+y^2)^2}$ तथा $w = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, x अक्ष, y अक्ष तथा z अक्ष की दिशाओं में तरल प्रवाह गति के सम्भव वेग घटक हैं । **20**

(a) Prove that the function $f(z) = u + iv = \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}$ when $z \neq 0$ and $f(0) = 0$ is continuous at the origin and that Cauchy-Riemann equations are satisfied there, yet $f'(z)$ does not exist there.

(b) Show that $u = \dfrac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $v = \dfrac{(x^2-y^2)\,z}{(x^2+y^2)^2}$ and $w = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ are the possible velocity components of a liquid motion along the axes of x, y and z.

6. (अ) सिद्ध कीजिए कि कोई वलय (रिंग) R , शून्य भाजकों से तभी मुक्त है जबकि यदि और केवल यदि इसमें गुणा के निसरण नियम लागू होते हैं । **20**

(ब) न्यूटन-राफसन विधि को दो बार प्रयोग करके समीकरण $x^4 - 12x + 7 = 0$ का एक वास्तविक मूल जो 2 के निकट है, ज्ञात कीजिए (दशमलव के दो स्थानों तक) **20**

(a) Prove that a ring R is without zero divisors iff the cancellation laws of multiplication hold in R.

(b) By applying Newton-Raphson method twice, find the real root (upto 2 places of decimal) near 2 of the equation $x^4 - 12x + 7 = 0$.

7. (अ) चारपिट विधि द्वारा हल कीजिए

$p(1 + q^2) + (b - z)\,q = 0$, जहाँ b एक अचर है । **20**

(ब) दर्शाइए कि $u = x \cdot y + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ का निम्निष्ठ मान $3a^2$ है । **20**

(a) Solve by Charpit's method $p(1 + q^2) + (b - z)\,q = 0$, where b is a constant.

(b) Show that the minimum value of $u = x \cdot y + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ is $3a^2$.

8. (अ) समाकल $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\,dx$ के अभिसारी या अपसारी होने की विवेचना कीजिए, जहाँ पर m व n धनात्मक पूर्णांक हैं । **20**

(ब) एक पतली एकसमान छड़ का, उसके उस अक्ष के सापेक्ष मोमेन्ट आफ इनर्शिया निकालिए जो उसके गुरुत्व केन्द्र से होकर जाता है और छड़ की लम्बाई के लम्बवत् है । **20**

(a) Discuss the convergence or divergence of the integral $\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\,dx$ where m, n are positive integers.

(b) Find the moment of inertia of a thin uniform rod about an axis passing through its centre of gravity and perpendicular to its length.
